

Математический анализ. Производные. Пределы. Исследование функций.

Задание №1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций:

- | | | | |
|----|--|--|---|
| 1. | a) $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}};$ | б) $y = x \ln \cos x;$ | в) $y = 1 + \sin 2(xy).$ |
| 2. | a) $y = \ln^3 \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$ | б) $y = x^2 \sin \sqrt{x};$ | в) $y = x \ln y.$ |
| 3. | a) $y = \sqrt[3]{x\sqrt{1+x^2}};$ | б) $y = x \sin x^2;$ | в) $xy + x^2 - y^2 = 1.$ |
| 4. | a) $y = \ln^8 \sqrt{\frac{4+x^2}{4-x^2}};$ | б) $y = \frac{2 \cos^2 x}{1 - \sin 2x};$ | в) $\frac{x}{y} - 2x^2 + 3 = 0.$ |
| 5. | a) $y = 2^3 \sqrt{(2-x^3)^2};$ | б) $y = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x};$ | в) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 4.$ |
| 6. | a) $y = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 9};$ | б) $y = \frac{4 \ln x}{1 - \ln x};$ | в) $y = x \sin y;$ |
| 7. | a) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x^2)^3}};$ | б) $y = x^3 \sin^3 x;$ | в) $y = x \arctg \frac{y}{2}.$ |
| 8. | a) $y = \frac{20}{\sqrt{x^3 x + 1}};$ | б) $y = \tg \frac{x}{2} - \ctg \frac{x}{2};$ | в) $xy^3 - x^2 + 3y = 0.$ |
| 9. | a) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$ | б) $y = \frac{\tg 2x}{1 + \sin 2x};$ | в) $y = \arcsin \sqrt{x} - e^{2y}.$ |
| 0. | a) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$ | б) $y = \tg^2(1-x);$ | в) $xy - 3^{\sin y} = 0.$ |

Задание №2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций:

- | | | | |
|----|--|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. | a) $y = \ln^3 \sqrt{\left(\frac{7x-4}{7x+4}\right)^2};$ | б) $y = 2^{\sqrt{x-2}};$ | в) $\frac{x}{y} - 3\sqrt{y} = 10.$ |
| 2. | a) $y = \ln \sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3};$ | б) $y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2};$ | в) $ye^{-xy} = 2.$ |
| 3. | a) $y = \ln^6 \sqrt{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7};$ | б) $y = \arctg \sqrt{x-1};$ | в) $y = x \sin 2y.$ |
| 4. | a) $y = \arctg \frac{1}{1-x};$ | б) $y = 3^{\sin^3 3x};$ | в) $\frac{1}{\sqrt{xy}} - x^3 = 0.$ |
| 5. | a) $y = \ln^4 \sqrt{\frac{1-8x}{x^8+1}};$ | б) $y = \frac{2}{\arctg \sqrt{x}};$ | в) $y = x \sin 2y.$ |
| 6. | a) $y = \frac{3-x^2}{6\sqrt{x}};$ | б) $y = \arccctg \frac{1}{\sqrt{x}};$ | в) $y = 1 + xe^y.$ |
| 7. | a) $y = x^2 \sqrt{16-x^2};$ | б) $y = \frac{\sin 5x}{1-2\sin 5x};$ | в) $xy = e^{2x} - e^{-3y}.$ |

8. а) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^4}$; б) $y = e^{-x}(2 \sin 5x + \cos 5x)$; в) $x^3 y - \frac{1}{y} + x = 0$.
9. а) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+1}}$; б) $y = 2^{\sin^2 10x}$; в) $x = y + \operatorname{arccctg} y$.
0. а) $y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$; б) $y = \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^2 8x - 1}$; в) $x^2 \sin y + \cos y = 0$.

Задание №3. Найти пределы функций:

- | | |
|--|--|
| 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+1}$ |
| 2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1 - \cos x}$ |
| 3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$ |
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$ |
| 5. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$ |
| 6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$ |
| 7. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ |
| 8. а) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^2}{1 - 3x^2}$ |
| 9. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ | б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$ |
| 0. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x^3}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$ |

Задание №4. Найти пределы функций:

- | | |
|---|---|
| 1. а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}$ | б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 5}$ |
| 2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{e^x}$ |
| 3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$ |
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x}$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 + x}$ |
| 5. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}$ |

$$6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctgx}}{\cos 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}$$

$$7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1 - x^3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$$

$$8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 4x}$$

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x}$$

$$0. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x} - e^{2x}}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 - 1}$$

Задание №5. Исследовать функцию и построить ее график

$$1. \quad y = \frac{2x}{x^2 + 1};$$

$$2. \quad y = \frac{y^x}{x};$$

$$3. \quad y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$4. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$5. \quad y = \ln(x^2 - 4);$$

$$6. \quad y = x e^{-x}.$$

$$7. \quad y = \frac{\ln x}{x};$$

$$8. \quad y = x e^{-x^2};$$

$$9. \quad y = 2x^4 - x^2.$$

$$0. \quad y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

Задание №6. Исследовать функцию и построить ее график

$$1. \quad y = \frac{9}{x^2 - 9};$$

$$2. \quad y = x - \ln(x + 1).$$

$$3. \quad y = \ln(1 - 2x);$$

$$4. \quad y = e^{\frac{1}{x}};$$

$$5. \quad y = \ln(9 - x^2).$$

$$6. \quad y = \frac{x^2}{x - 1};$$

$$7. \quad y = \frac{x^4}{5} - 2x^2 + 5;$$

$$8. \quad y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$9. \quad y = x \ln x;$$

$$0. \quad y = \frac{x}{\sqrt{x - 4}}.$$